

# 科学与工程中的数学模型

Alfio Quarteroni

数学建模的目的在于通过数学描述现实世界的不同方面，它们的相互作用，及它们的动力学。它构成科学与工程的第 3 大支柱，完善了两种更传统的学科，理论分析与实验。如今，数学建模也在诸如环境和工业等领域扮演着关键角色，同时，它在其它领域的潜在作用正在变得愈发明显。这种不断成功的原因之一要归功于科学计算飞速的进步。科学计算这个学科使得只有偶尔才能显式求解的数学模型可以转化成通过更强大的计算机可处理与可解的算法。图 1 是一幅展示通过科学计算从问题到解的整个过程的综合视图。从 1960 年开始，数值分析——允许数学方程(代数的，泛函的，微分的，积分的)通过算法获得解决的学科——在源于工程和应用科学的数学模型的问题求解中起着主导作用。基于这些成就，一些新的学科，即信息与通讯技术，生物工程，金融工程等等，开始使用数学建模。事实上，数学模型为应付技术的不断增加的复杂性提供了新的可能性，技术是现代工业生产的基石。它们可以在相当短的时期内探索新的解，因而使得创新的循环加速。这确保了对于工业的潜在优势，从而可以在工业的研发和认证阶段节省时间和资金。因此，我们可以说数学建模和科学计算正在逐渐地也不可阻挡地扩展到种种领域，成为定性和定量分析的唯一工具。在下面的几节中，我们将讨论数学建模和科学计算在应用科学中的角色；它们在模拟、分析以及决策中的重要性；以及它们对技术进步的贡献。我们将展示一些成果，强调在不同领域如工业、环境、生命科学、体育中的远景。

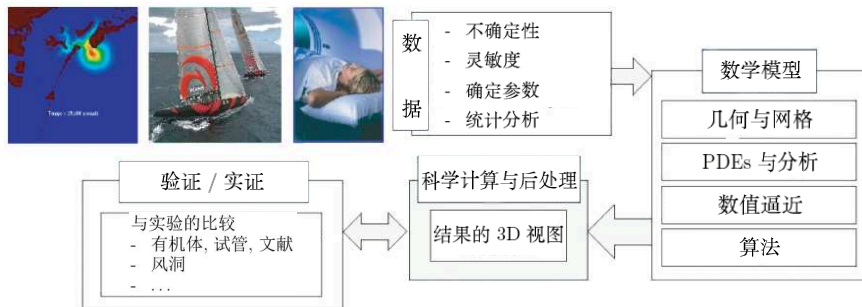


图 1 科学计算一瞥 (图中, PDEs= 偏微分方程)

## 1. 技术创新中的科学计算

与计算机的计算速度令人难以置信的增加相关，科学计算足以确定哪些复杂问题可以处理，哪些复杂问题无法处理。科学计算的目标是开发多样化和可信赖的模型，它们用闭形式<sup>1)</sup>来详细说明，在大范围——类似的或实验性的——中检验例子，对于这些

译自: Notices of the AMS, Vol.56 (2009), No.1, p.10–19, Mathematical Models in Science and Engineering, figure number 10, Alfio Quarteroni. Copyright ©2009 the American Mathematical Society. Reprinted with permission. All rights reserved. 美国数学会与作者授予译文出版许可。

1) 一个表达式被称为具有闭形式，当且仅当它可以解析地用有限个“熟知的”函数来表示。所谓“熟知的”函数，是指初等函数，以及初等函数之间进行有限次初等运算(加减乘除，开  $n$  次根，取指数和取对数)后的结果。——校注

例子, 都存在有用的参考解。

一个数学模型必须能够探讨一般性的概念, 比如, 一个流体的质量或动量守恒, 或一个结构的惯性矩; 此外, 为获得成功的数值模拟, 有必要确定在模型的不同部分需要引进何种程度的细节, 以及为了促进不同模型的整合需要实施何种简化. 能够模拟非常复杂问题的模型应当考虑由于缺乏数据 (或受噪声影响的数据) 导致的不确定性反过来对模型本身的影响. 这些类型的模型用于预测自然的, 生物的, 以及环境的作用, 以此更好地了解这些复杂的现象如何起作用, 也为了对新产品和新技术的设计有所贡献.

科学计算的一个重要方面体现在计算流体力学 (CFD), 这是一门目标为利用计算机解决受流体支配问题的学科. 例如, 在航空航天技术方面, CFD 有多种方式的应用. 基于位势流方程或更复杂的 Euler (欧拉) 方程组或 Navier-Stokes (纳维-斯托克斯) 方程组的数值模拟可以用于, 例如机翼的空气动力学分析或机身体性能优化. 图 2 和图 3 分别展示了用稳定化的有限元逼近解欧拉方程组数值模拟民用飞机 (隼 50) 和 X29 实验飞机 [1]. 模拟意味着认证和优化, 目的在于设计出符合特定需要的飞机: 更好的结构可靠性, 更好的空气动力性能, (在商用飞机方面) 通过减少噪音排放, (在军用飞机方面) 通过速度的优化, 以及灵活性的提升以降低对环境的影响. 这些问题的解决需要多目标优化算法: 确定性的, 随机的, 或遗传的. 此外, 为了抑制外部电磁场对由飞行器上的仪表中若干电路产生的电磁场的干扰, 利用电磁扩散模型模拟外部电磁场. 通过目的在于提高结构和动力稳定性的关于流体和结构相互作用的算法, 也有一些模型用于模拟飞机一些部位的应力和形变 (材料应变分析的模拟). 在汽车工业领域也研究了类似的分析, 在该领域数值模拟被用于设计和汽车生产的几乎每个方面. 为了节约燃料, 提高排放物的质量, 以及减少噪音, 模型被用于模拟内燃机的燃烧过程. 此外, 为提升可操作性, 安全性和舒适度, 需要解多种类型的方程, 诸如那些模拟外部和内部流体动力学, 空气弹性动力学, 空气声音振动动力学的方程, 而且还有那些控制包括热交换, 燃烧过程, 激波 (发生在气囊刚打开的瞬间), 大应力下的结构动力学, 以及模拟汽车碰撞结果的大形变等的方程. 化学工业利用数学模型模拟聚合过程, 压缩, 或复合流变物质的挤压, 这个过程中通常的连续介质力学的宏观分析一定要结合微观分析, 后者更足以描述具有纳米结构的物质的



图 2 一架民用飞机的马赫数分布和脉线

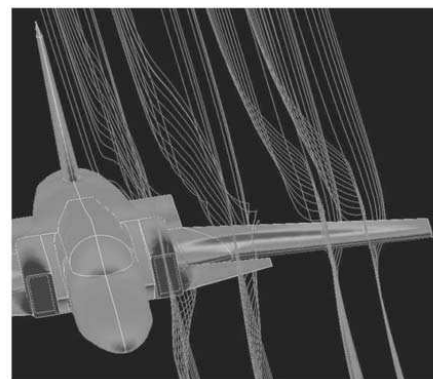


图 3 X29 试验飞机的马赫数和脉线

复合流变。这需要开发多尺度分析技术和算法，这些技术和算法能够描述各种不同空间尺度中的机械交换，热交换，以及化学过程交换。在电子工业领域，漂流 - 扩散的模拟，水动力学，Boltzmann (玻耳兹曼) 方程，或 Schrödinger (薛定谔) 方程在设计更小，更快的具有越来越多功能以及大大减少资源浪费 (这是最基本的，例如，在移动电话的不同应用中) 的集成电路方面扮演着关键角色。有效算法对加密或解密多用户信息同样有用。

## 2. 模拟气象

在最近几十年，预测短时间内 (每天或每周) 天气的关键问题与长时间的预测 (10 年甚或一个世纪)、气候演变，以及大气污染问题有越来越多的关联。幸运的是，遵行物理学定律的特定区域存在着自然的气候变化，因此可以通过数学模型来模拟。同样地，从整体 (以一个大陆或全球的尺度) 观点看，有一些气候变化归因于某些决定性的现象，例如，地轴倾斜度的变化，地球轨道离心率的变化，大洋环流，或剧烈的地质现象如火山喷发。气象预测问题被当做数学问题来阐述仅仅在 20 世纪初由挪威数学家 Vilhelm Bjerkned 提出，他用理想气体动力学的欧拉方程 (当时已有很好的了解) 来描述大气运动，为考虑重力和地球自转的作用，方程被适当地修正。遗憾的是，关于大气的数据只有少数的几个点可用，并且数据涉及多种变量以及不同的时期。

此外，欧拉方程刻画了极其广泛的各种大气运动，它们可以发生在相互间完全不同的空间和时间尺度上 (英尺代替英里，秒代替天)。某些这类尺度的数据的缺乏可能产生伪运动 (自然界并不存在的运动)，并且降低预测的质量。气象现象的一个符合实际的描述必须考虑水蒸汽分布的预测，它的变化 (从液体到气体)，以及由此导致的降雨量。从数值观点去解决这个问题第一次尝试是由 Lewis Richardson (刘易斯·理查森) 实施的，他成功地计算出以整个北欧为区域广度的大气运动的解的一个具体例子。理查森通过极其复杂的手算得出的结论导出了完全错误的预测；事实上，当时没有理论可以控制所解的那些方程的陷阱。理查森的一个学生 Carl-Gustaf Rossby (卡尔 - 古斯塔夫·罗斯贝) 的贡献足以决定性地优化理查森所做出的努力。1920 年代移民美国之后，他促成建立了二战期间民用航空和军事航空的气象服务。在他做出的间接贡献中，包含了美国人为 D-Day (1944 年 6 月 4 日)<sup>1)</sup> 做的天气预报。罗斯贝引入的简化的数学模型使得天气预报第一次可以用电子计算机产生，计算机诞生于 John von Neumann (约翰·冯·诺依曼) 和 Jules Charney (朱·查尼) 1940 年代始于在普林斯顿的合作。特别地，通过一个将大气描述成唯一流层的简化模型，对整个北美的天气做出预测是可能的。尽管在仅有的一台可用的计算机 (ENIAC) 上对随后 12 小时做出预测需要花费 24 个小时，冯·诺依曼和查尼的努力第一次证明了基于仅有一个数学模型的预测可以得到与当时的气象专家所获得一样的结果。数值天气预报的现代方法诞生了。事实上，除了计算机性能的辉煌进展，数学预测工具的精度也有了根本的改进，混沌动力系统可预测性理论也得到发展，以及数据同化技术也得到提高。1970 年代卫星测量数据的系统使用被引入，它构成今天用于启动数

---

1) D-Day, 指二战中英美军队在法国西北部诺曼底地区对德军进行的登陆战役发起日 1944 年 6 月 4 日。诺曼底战役以 7 月 25 日盟军占领圣洛一线为结束。战役的胜利为解放法国和攻入德国本土扫清了前进道路。—— 校注

值模型的数据的最密切的相关部分。从那以后，科学与技术进步的影响变得非常重要。例如，欧洲中等范围天气预报中心 (ECMRF) 的 ISF 全球模型用一个水平 22 千米，垂直 90 千米的平均空间分解计算网格。这使得部分平流层得以被包含。这个模型用现代并行超级计算机可在大约一个小时内做出一个 10 天的预测，尽管后面还要加 6 小时插入数据所需的时间。IFS 模型以一个大陆的尺度在欧洲能做出 7.5 天的可靠预测。图 4 是天气预报的一个例子。

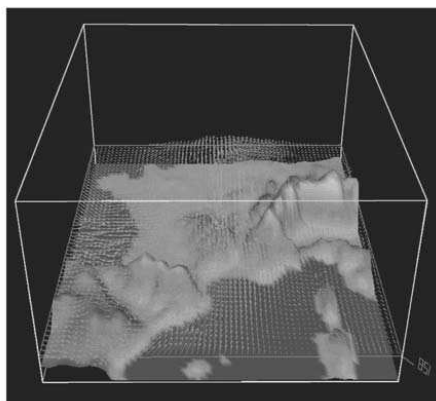


图 4 地中海上风速模拟

### 3. 生命科学的模型

在 1970 年代，在试管中进行的实验，和那些在动物身上的实验代表了心血管研究的主要方式。近来，计算流体动力学的进展以及计算机性能的巨大提升导致了显著进步，从而变革了血管的研究 [7]。

例如，一个有重要意义的物理量诸如内膜上的剪切应力，它在试管中很难进行实验，却可以在由三维算法得到的实几何上简单算出，这归功于现代无损数据获取技术 (例如核磁共振，数码血管照相术，轴向体层摄影术，多普勒风向测速法) 的支持。血液在动脉或静脉中流动时，机械地与血管壁相互作用，产生复杂的流体结构相互作用问题。事实上，压力波将机械能传给血管壁，血管壁扩张；当血管收缩时，这部分能量又回到血液中。血液流与血管壁相互作用的血管模拟需要这样的算法：它刻画流体 (主要由纳维-斯托克斯方程组模拟) 和结构 (由固体力学方程组模拟) 之间宏观层面能量的转换，以及剪切应力对确定方位、形变和内膜细胞的损害在微观层面的影响 [8]。与此同时，为了刻画血液中构成动脉血管壁的不同层 (内膜，中膜，外膜) 化学成分 (如氧，脂类和药物) 的传

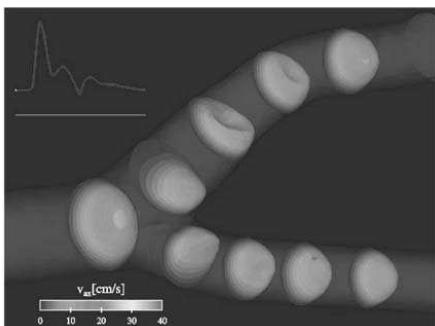


图 5 计算机计算得到的颈动脉顺流方向的速度剖面

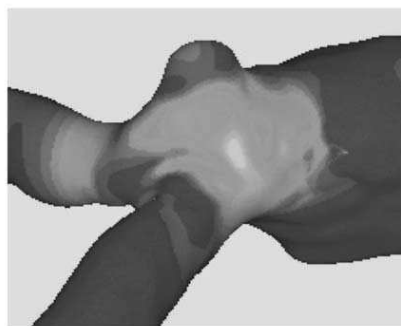


图 6 肺动脉剪切应力分布

输、扩散、以及吸收，流方程必需与适当的模型耦合。这类数值模拟可帮助厘清——如，由动脉变窄产生的——流场变化而引起的生化修正。在心血管系统中，独立流与二次环流的条件同时存在，这不仅在以大曲率为特征的血管中存在 (比如弯曲主动脉或冠状动脉)，而且在分支的顺流方向 (例如其内部和外部分支的颈动脉)，或由于狭窄而导致有限

制的区域的顺流方向存在. 存在逆向流 (从末梢到近中心区域) 的其它区域, 以及具有随时间振荡的低剪切应力的区域 [9]. 这些情况在如今动脉病理学的发展中都被认为是潜在因素. 局部血液动力学变化, 血管壁的改变对血流规律产生的影响, 以及整个系统长时间接受外科干预下中期的渐进适应, 对这些的一个详细了解, 如今由于先进的计算机模拟的使用而成为可能, 并且在确定一个医疗措施之前的预备性阶段可能极其有用. 一个相似的情况可能为外科手术过程提供具体的数据. 模拟冠状动脉搭桥手术中的血流, 尤其是冠状动脉中搭桥顺流方向发生的重新循环, 可能帮助我们了解动脉形态学对血流的影响, 进而了解对术后的进程的影响. 最优形态控制理论对设计一种能够最小化冠状动脉搭桥顺流方向产生的涡量的搭桥方案可能有用. 类似地, 血管修复和人工心脏瓣膜植入对局部和整体血液动力学影响的研究由于血液流体领域更精确的模拟而可能取得进展. 在虚拟的手术中, 也可以通过模拟来设计对特定病人选择的疗法的结果. 这种数值方法是实践范例的一方面, 称为预测医学. 图 7 是我们目前在心血管流模拟领域研究项目的详尽图示.

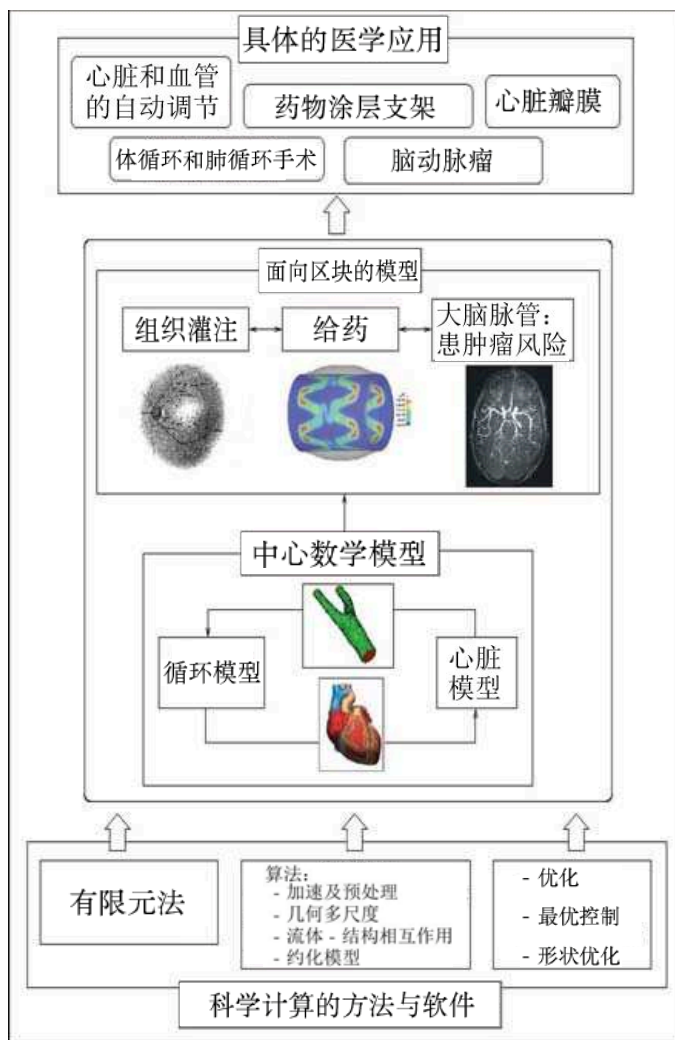


图 7 心血管流模拟及相关主题的科学计算

#### 4. 模拟和竞赛中的模型

数学模型的应用不限于技术, 环境或医学领域. 事实上, 确定性模型和随机模型用于分析金融产品的风险已经有很多年, 因而促使一门称为金融工程的新学科的产生. 此外, 新的边界也开始触及社会学、建筑学、娱乐和体育.

至于竞技体育, 计算流体力学多年来在分析和设计一级方程式赛车中担当着关键角色. 但一级方程式比赛并不是数学 / 数值模型应用的唯一领域. 实际上, 我的来自于

EPEL 的研究小组曾有过一个极其有趣的经历，是观察瑞士游艇 Alinghi 夺得 2003 年和 2007 年的美洲杯。直到 20 年前，不同的设计团队才习惯于开发不同形状的帆，船体，球形船艏<sup>1)</sup>和龙骨。如今不同的几何形状都已标准化，即使是最小的细节差异也可以造成迥然不同的结果。引用麻省理工的教授，也是美洲杯多个美国队的顾问专家 Jerome Milgram 的话：“美洲杯的团队要求船体，龙骨以及帆的设计要极其精确。一艘新船若能减少 1% 的粘性阻力，它就可能在终点线获得多达 30 秒的潜在优势。”为了优化船的性能，有必要解关于整艘船周围的流体动力学方程，同时考虑风和波的变化，游艇比赛中的不同条件，位置，反向船只移动的变化，还要考虑流体相互作用（水和空气）的动力学，并且也必须考虑结构元件（船体，配件，帆，桅杆）。此外，还有所谓自由面（水和空气的接触面）的形状和动力学也需要精确地模拟。一个完整的数学模型必需考虑到刻划物理问题的所有这些方面。目的是与设计者一道开发出对船体，龙骨和附件的最优模型。

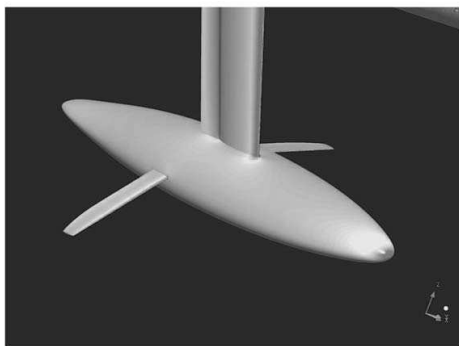


图 8 帆船各部位的压强分布

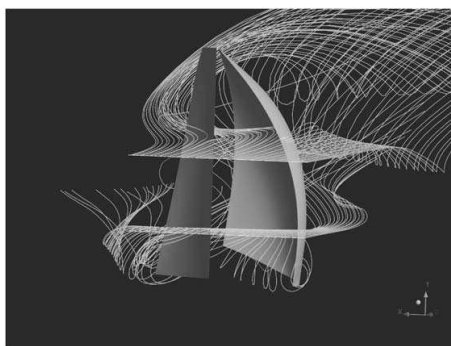


图 9 顺风行驶时主帆及大三角帆周围的流线

理想地，人们希望最小化水对龙骨和附件的阻力而最大化帆产生的动力。数学允许对不同的情况进行模拟，这样，减少了费用，也节约了通常建造大量的模型用于船模试验和风洞试验所需要的时间。对设计者们（好几百位）提出的每艘新船的模拟，需要建立几何模型——大概需要 300 个样条曲面来覆盖整艘船——从而在船的所有构件的表面创建足够可靠的网格，使得可以确定层流区域与湍流区域之间的过渡，也因此可以构造外部区域的体积网格。一定要用不可压缩粘性流的纳维-斯托克斯方程刻画水和风的动力学以及相应的自由面，自由面的完整刻画还需要额外的可以计算湍流能量及其耗散速率的方程。这些方程无法确切地解出闭形式的显式解。它们的近似解需要引入修正的离散化方法，这个方法可以将一个无穷维问题转化成一个很大但是有限维的问题。基于有限体积格式的典型计算，包含有几百万个未知量的非线性问题的解。使用并行算法，在 64 台处理器的并行计算平台上生成一个超过 160 万个未知量的模拟需要 24 小时。更进一步的计算涉及利用流体结构算法对风和帆的动力学相互作用的模拟。这些模拟使得设计团队可以排除看起来怪异的解而继续处理那些确实能保证更好性能的解。此外，通过模拟两艘船之间空气动力学相互作用的影响，人们可以确定阴影区域（由两艘船相对位置导致的少风的区域），流体的扰动以及由空气相互作用产生的湍流涡度的一致性，从而

1) 船艏，船的前部。——校注

也获得对战术家有用的信息. 这些研究目的在于设计出一艘船, 它具有美洲杯游艇必须有的 4 种特征的最优组合: 轻度, 速度, 阻力以及灵巧性, 这些对于改变竞赛结果是必要的.

关于这类研究所需的数学工具的一个更深入的描述将在下节给出.

## 5. 美洲杯的数学模型

美洲杯设计团队评估一个设计的改变 (以及由此引起的所有设计修正) 是否整体有益所采用的标准方法, 是基于速度预测方案 (VPP) 的使用, 它可以用来评估在任何规定的风情况和航角下的船速和姿势. 船速和姿势的数值预测可以通过模拟作用于船的空气动力和流体动力之间的平衡获得.

例如, 在水面上, 一个平稳航行的条件是通过施加在  $x$  方向 (与船速方向一致) 和  $y$  方向 (在水面上与  $x$  正交的方向) 两个力的平衡以及沿船中心线倾斜力矩的平衡而获得的:

$$\begin{aligned} D_h + T_a &= 0, \\ S_h + S_a &= 0, \\ M_h + M_a &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

其中  $D_h$  是水的阻力 (沿航线方向),  $T_a$  是气动推力,  $S_h$  是与航线方向垂直的水的侧向力,  $S_a$  是气动侧向力,  $M_h$  和  $M_a$  分别是沿船平均线的流体复原时力矩和气动倾斜力矩. 航线方向与船中心线夹角  $\beta_Y$  称为 偏航角. 气动推力和侧向力可以看作为与航线方向平行的参照系中气动升力和阻力的分解, 气动升力与阻力定义在与明显的风向平行的参照系中. 对其它自由度也可以获得一些类似的平衡方程.

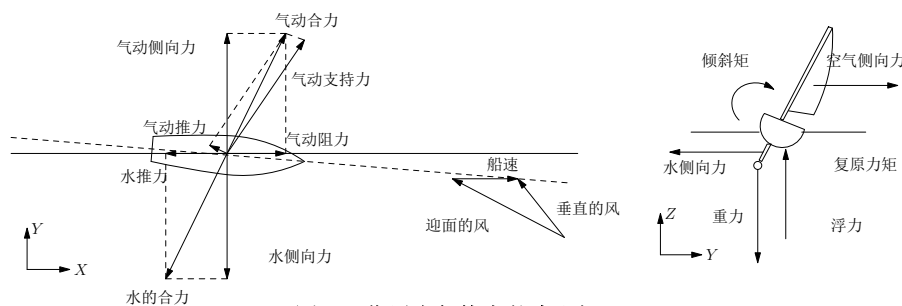


图 10 作用在船体上的力和矩

在方案 VPP 中, 方程组 (1) 中所有的项分别是船速, 倾斜角, 偏航角的函数. 系统自由度和不同力之间适当的相互作用关系可以基于数据的不同来源而获得: 实验结果, 理论预测, 和数值模拟.

高等计算流体力学的作用是提供不同航行条件下作用于船的力的精确估计, 从而提高与给定的设计配置相关的整体性能预测的可靠性.

### a. 流方程

令  $\Omega$  表示我们求解的流方程的三维计算区域. 若  $\hat{\Omega}$  是围绕船体  $B$  的区域, 则计算区域是  $B$  关于  $\hat{\Omega}$  的余集, 即  $\Omega = \hat{\Omega} \setminus B$ . 控制  $B$  附近流的方程组依赖于密度 (或非齐次)

的不可压缩纳维 - 斯托克斯方程组, 对于  $x \in \Omega, 0 < t < T$ , 其形式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \nabla \cdot \tau(u, p) = \rho g, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (4)$$

$\rho$  是 (变化的) 密度,  $u$  是速度场,  $p$  是压强,  $g = (0, 0, g)^T$  是重力加速度,  $\tau(u, p) = \mu(\nabla u + \nabla u^T) - pI$  是应力张量,  $\mu$  表示 (变化的) 粘性. 上述方程组需要附加适当的初始条件和边界条件. 对后者我们一般地考虑在流入边界处有给定的速度剖面, 它在远的平坦的区域 (flat far field) 内的自由面上变大.

在我们感兴趣的情形中, 计算域  $\Omega$  由两个区域组成, 充满水的  $\Omega_w$  以及充满空气的  $\Omega_a$ . 分离  $\Omega_w$  和  $\Omega_a$  的界面  $\Gamma$  是 (未知) 自由面, 如果波的间断也考虑到的话, 它可能是不连通的二维流形. 未知密度  $\rho$  事实上表现为两个常数状态,  $\rho_w$  (在  $\Omega_w$  中) 和  $\rho_a$  (在  $\Omega_a$  中).  $\rho_w$  和  $\rho_a$  的值依赖于流体的温度, 在现在的模型中温度被认为是常数. 流体的粘性  $\mu_w$  (在  $\Omega_w$  中) 和  $\mu_a$  (在  $\Omega_a$  中) 分别是依赖于  $\rho_w$  和  $\rho_a$  的常数.

方程组 (2)–(4) 因此可以视为一个由具有常数密度  $\rho_w$  和  $\rho_a$  以及不同的粘性系数  $\mu_w$  和  $\mu_a$  的两个不可混合的不可压缩流组成的二相流的发展模型. 在这方面, 鉴于数值模拟, 我们可以认为方程 (2) 用于获得更新的 (未知) 界面位置  $\Gamma$ , 然后将 (3)–(4) 当成两个子域  $\Omega_w$  和  $\Omega_a$  中纳维 - 斯托克斯方程组的一个耦合系统处理:

在  $\Omega_w \times (0, T)$  中,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_w u_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w u_w \otimes u_w) - \nabla \cdot \tau_w(u_w, \rho_w) &= \rho_w g, \\ \nabla \cdot u_w &= 0, \end{aligned}$$

在  $\Omega_a \times (0, T)$  中,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_a u_a)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a u_a \otimes u_a) - \nabla \cdot \tau_a(u_a, \rho_a) &= \rho_a g, \\ \nabla \cdot u_a &= 0. \end{aligned}$$

我们已令  $\tau_w(u_w, p_w) = \mu_w(\nabla u_w + \nabla u_w^T) - p_w I$ ,  $\tau_a(u_a, p_a)$  类似地定义.

自由面  $\Gamma$  是  $\Omega_w$  和  $\Omega_a$  之间的一个清晰界面, 在其上两个速度的法向分量  $u_a \cdot n$  和  $u_w \cdot n$  相同. 并且, 由于两个流都是不可压缩的, 切向分量也一定相一致. 这样, 我们有下面的运动条件:

$$u_a = u_w \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上.} \quad (5)$$

此外, 对自由面上流体作用的力是平衡的. 这是个动力学条件, 并且意味着  $\Gamma$  两侧的法向力大小相等, 方向相反, 而切向力的大小与方向都相同:

$$\tau_a(u_a, p_a) \cdot n = \tau_w(u_w, p_w) \cdot n + \kappa \sigma n \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \quad (6)$$

其中  $\sigma$  是  $\Gamma$  的张量系数, 它是切向地作用于自由面的自由面元每单位长度的力. 这是液体的一个性质, 依赖于温度和其它因素. (6) 中量  $\kappa$  是自由面的曲率,  $\kappa = R_{t_1}^{-1} + R_{t_2}^{-1}$ , 其



中  $R_{t_1}, R_{t_2}$  是沿与 (与  $n$  正交的) 自由面相切的平面坐标  $(t_1, t_2)$  的曲率半径.

### b. 与 6-DOF (自由度) 刚体耦合的动力系统

船在平静的水面或波涛汹涌的海面前进的姿势全然与其性能相关. 基于这个原因, 帆船设计预测的最先进的数值工具应当可以考虑到船的运动.

在 [2, 3] 中采用的方法中, 考虑两个正交的笛卡儿参照系: 一个惯性参照系  $(O, X, Y, Z)$ , 它以平均船速向前移动, 另一个是定体参照系  $(G, x, y, z)$ , 原点在船的质心  $G$ , 随船平移和旋转. 惯性参照系的  $XY$  平面与不受扰动的水面平行,  $Z$  轴向上. 定体参照系的  $x$  轴从船头指向船尾,  $y$  的正轴为船右舷,  $z$  轴向上.

自由度为 6 的船的动力学情况由积分惯性参照系统中线性动量与角动量的变差方程决定, 如下:

$$m\ddot{X}_G = F, \quad (7)$$

$$\bar{T}\bar{T}^{-1}\dot{\Omega} + \Omega \times \bar{T}\bar{T}^{-1}\Omega = M_G, \quad (8)$$

其中  $m$  是船的质量,  $\ddot{X}_G$  是质心的线性加速度,  $F$  是作用于船的力,  $\dot{\Omega}$  和  $\Omega$  分别是角加速度和角速度,  $M_G$  是作用于船的力  $G$  的矩,  $\bar{T}$  是船关于定体参照系诸坐标轴的惯性张量,  $\bar{T}$  是定体参照系与惯性参照系之间的变换矩阵 (详见 [2]).

作用于船的力和矩由下面式子给出

$$F = F_{\text{Flow}} + mg + F_{\text{Ext}},$$

$$M_G = M_{\text{Flow}} + (X_{\text{Ext}} - X_G) \times F_{\text{Ext}},$$

其中  $F_{\text{Flow}}$  和  $M_{\text{Flow}}$  分别表示与流体相互作用的力和矩,  $F_{\text{Ext}}$  是外力 (例如可以认为是风作用于帆的力), 而  $X_{\text{Ext}}$  是其作用点.

### c. 风 - 帆相互作用方程

帆的形变是由于流体运动: 气动压力场使帆表面产生形变, 而这反过来修正了帆周围的流场.

从数学的角度, 这导致包含一个常数密度  $\rho = \rho_{\text{air}}$  的不可压缩纳维 - 斯托克斯方程组 (3), (4), 和将帆形变模拟成膜形变的一个二阶弹性动力学方程的耦合系统. 更具体地, 所考虑的弹性结构的演化由连续介质力学的经典的守恒律控制.

考虑一个 Lagrange (拉格朗日) 框架, 如果  $\hat{\Omega}_s$  是帆所在的参照二维区域, 则控制方程可以写成如下形式:

$$\rho_s \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma_s(d) + f_s, \quad \text{在 } \hat{\Omega}_s \times (0, T] \text{ 中}, \quad (9)$$

其中  $\rho_s$  是物质密度, 位移  $d$  是空间坐标  $x \in \hat{\Omega}_s$  和时间坐标  $t \in [0; T]$  的函数,  $\sigma_s$  是内部应力, 而  $f_s$  是作用于帆的外部载荷 (这些事实上是由流场施加于帆表面的法向张力  $\tau(u, \rho) \cdot n$ ). 事实上,  $\hat{\Omega}_s$  代表了同时包含做为结构模型中一部分的桅杆和纱的更大的 (有界和不连通的) 区域.  $\hat{\Omega}_s$  的边界记为  $\partial\hat{\Omega}_s$ ,  $[0, T] \subset \mathbb{R}^+$  是我们分析的时间区间. 对适当的初始条件和边界条件以及所考虑物质 (定义为  $\sigma_s(d)$ ) 适当的一个本构方程, 位移场  $d$  通

过解 (9) 的弱形式计算得到:

$$\int_{\hat{\Omega}_s} \rho_s \frac{\partial^2 d_i}{\partial t^2} (\delta d_i) dx + \int_{\hat{\Omega}_s} \sigma_{ik}^{II} (\delta \epsilon_{ki}) dx = \int_{\hat{\Omega}_s} f_{si} (\delta d_i) dx, \quad (10)$$

其中  $\sigma^{II}$  是第 2 Piola-Kirchoff (皮奥拉-基尔霍夫) 应力张量,  $\epsilon$  是 Green (格林)-拉格朗日应变张量,  $\delta d$  是体现虚形变的试验函数. 第 2 耦合条件赋予帆表面上两个速度场  $u$ ,  $\partial d / \partial t$  连续性.

#### d. 流体结构耦合算法

正如前面介绍的, 耦合过程在流体求解程序 (输入帆速度并获得压力场) 和结构求解程序 (输入压力并得到速度和结构形变) 之间循环迭代, 直到由于力和矩达到完美平衡, 结构不再形变. 在处理瞬变的模拟时, 对时间的每一步这都必需是真, 从而航行几何做为收敛的状态序列随时间演化. 另一方面, 一个稳定的模拟可以被想象为含无穷时间步数的瞬变模拟, 使得“稳定”意味着真实 (不稳定) 解对时间的一种平均. 更形式地, 我们可以定义两个称为 Fluid 和 Struct 的算子分别表示流体求解程序和结构求解程序. 特别地, Fluid 可以是能求解不可压缩纳维-斯托克斯方程组的任何程序, 而 Struct 应能解决一个类膜问题, 如果有可能嵌入一个适当的非线性模型以考虑复杂的现象, 比如, 由于织物褶皱导致的结构反应.

不动点问题可以用新的算子重新组织成如下:

$$\text{Fluid}(\text{Struct}(p)) = p. \quad (11)$$

一个求解的算法可以如下设计. 在给定的步迭代中, 作用于帆的压力场  $p$  输入结构求解程序 (Struct), 这产生新的航行几何及新的航行速度场. 然后, 这些量输入到流体求解程序 (Fluid), 产生同一个作用于帆的压力场  $p$ . 显然, “等”号只在收敛时成立. 得到的不动点迭代可以更显式地重写成如下: 给定作用于帆的压力场  $p_k$ , 做:

$$\begin{aligned} (G_{k+1}, \mathbf{U}_{k+1}) &= \text{Struct}(p_k), \\ \bar{p}_{k+1} &= \text{Fluid}(G_{k+1}, \mathbf{U}_{k+1}), \\ p_{k+1} &= (1 - \theta_k)p_k + \theta_k \bar{p}_{k+1}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $G_{k+1}$  和  $\mathbf{U}_{k+1}$  分别是第  $k+1$  步的航行几何和航行速度场, 而  $\theta_k$  是适当的加速度参数.

尽管最终目标是运行一个非稳定模拟, 流体-结构程序需要运行一些初步的稳定对以获得一个合适的初始条件. 稳定运行直到获得收敛的帆形状和流场, 其中“收敛的”意即确实存在值  $k_c$ , 使得 (11) 对任意  $k > k_c$  (在给定的力和 / 或位移容限内) 成立. 当运行稳定模拟时要求每对帆的速度为零, 从而多少加强了收敛条件 (它规定收敛时没有速度). 这解释了为什么当运行关于瞬变模拟的稳定模拟时收敛更快一些 (显然只有这样一个解反映了稳定状态的物理解).

致谢、参考文献 (略)

(高燕芳 译 陆柱家 校)