编者按 新中国建立以来，我国的学科发展走出了一条成功而独特的"任务带学科"的发展道路，其在为经济社会发展及国家安全做出重大贡献的同时，确实对相关学科的建立或发展起了重要作用。在我国科技面临跨越发展的新时期，我们还需要从更加系统的角度思考学科发展的内在规律，把握好学科发展的整体趋势，促进我国学科的协调可持续发展。

"九层之台，起于累土"，中国科学院作为我国最高科研机构，有责任发挥学术引领作用，为中国的长远发展思考、为中国的科学崛起奠基。

基于上述，本刊拟遴选若干领域，在"学科发展"栏目以每期一个重点学科，围绕该学科的理论体系与方法论建设，以专栏形式组织评述文章，分不同领域阐述学科的意义，对长期以来学科的理论体系脉络和科学方法论走向进行全面、系统的挖掘、梳理和有针对性的凝练、集成，在此基础上提出我国未来的重大研究问题和学科发展对策，以推动该学科未来在基础理论或方法研究上取得重大突破。

基础数学的一些过去和现状*

文/席南华
中国科学院数学与系统科学研究院 北京 100190

【摘 要】文章试图通过人们对一些基本的数学研究对象如素数、圆、球、方程、函数等的探索历程展示基础数学的特点、部分思想和发展及现在活跃的一些研究方向。

【关键词】基础数学，数，形，代数，几何，分析

DOI:10.3969/j.issn.1000-3045.2012.02.002

谈论整个数学或基础数学的发展趋势已经超出一个人的能力，庞加莱和希尔伯特被认为是数学领域最后两个全才，后来还有一些杰出的数学家如冯诺依曼、柯尔莫格罗夫和I.M. 格尔方德等对纯数学和应用数学都做出了巨大的贡献，但现在这样的数学家也很难寻到了。

基础数学大致分为代数（含数论）、几何、分析（基于微积分的数学）3部分，但看一看前几届国际数学家大会的报告目录及其分组就知道现代数学的分支繁多，各部分间的融合与交叉也是日趋深入。有些方向是非常活跃的，如代数几何、数论、表示理论、动力系统、偏微分方程、几何分析、调和分

* 收稿日期：2012年2月19日

析、微分几何、复几何、拓扑、组合、数学物理等等。

数学是研究数与形的科学，也研究结构。逻辑支撑着数学的大厦，而其本身也是数学研究的对象，与计算机科学密切相关。

1 数学理论的起始

形是容易感知的，我们一睁开眼睛就会看到各种各样形状的物体。数却是一个抽象的概念，但其形成也有很长历史了。据考证和研究，人类在洞穴时代就已有数的概念了，若干动物也有数的概念。刚开始时，实际的需要产生了加法、减法、乘法、除法等运算，长度、面积等概念。到公元前3 000年，数学的应用范围就很广了，如税收、建筑、天文等。数学从理论上系统研究始于古希腊人，在公元前600年至公元前300年期间，代表人物有毕达哥拉斯、欧几里得等。欧几里得的《几何原理》采用公理化体系系统整理了古希腊人的数学成就，2 000多年来一直是数学领域的教科书，其体系、数学理论的表述方式和书中体现的思维方式对数学乃至科学的发展影响深远。

2 数和多项式方程及相关的数学分支

我们认识数学基本上都是从数开始的，然后是简单的几何与多项式方程。数中间有无穷的魅力、奥秘和神奇，始终吸引着最富智慧的数学家和业余爱好者。多项式方程是从实际问题和数的研究中自然产生的。在对数和多项式方程的认识和探究过程中，代数、数论、组合、代数几何等数学分支逐步产生。

2.1 素数

素数有无穷多个，在《几何原理》中有一个优美的证明。素数是数学永恒的研究对象，而且是最难以琢磨的数学研究对象，很多最为深刻的数学都与素数（或其复杂的其他形式如素理想等）有关。我们熟知的孪生素数猜想和哥德巴赫猜想，到现在仍未解决，目前最好的结果是陈景润的。但奇数哥德巴赫猜想由维诺格拉多夫于1937年基本解决。哈代-利特伍德猜想是比孪生素数猜想更为复杂的猜想。

对于素数在自然数中的比例，有著名的素数定理，曾是勒让德的猜想（1808年），阿达玛和德拉瓦勒-普森最先分别证明该定理（1896年）。1949年赛尔伯格和厄尔迪斯分别给出素数定理的初等证明。这是赛尔伯格获1950年菲尔兹奖的重要工作之一。

2004年陶哲轩和本·格林合作证明了存在任意长的等差素数数列。这项工作极大地激发了人们对解析数论的新热情，也是陶获2006年菲尔兹奖的重要工作之一。

18世纪欧拉对素数有无穷多个给出了深刻的证明，他用到无穷级数$1+2^{-1}+3^{-1}+\cdots$的发散性。他还对实数s考虑了级数$1+2^{-s}+3^{-s}+\cdots$。1859年，为研究素数的分布，黎曼对复数s考虑这个级数，证明了它可以延拓成复平面上的亚纯函数，现称为黎曼ζ函数，给出了函数方程，建立了这个函数的零点和素数分布的联系，提出了著名的黎曼猜想。该猜想断言黎曼ζ函数的零点除平凡的外实部均为1/2。黎曼对素数和ζ函数的研究影响深远。一般认为，黎曼猜想是数学中最有名的猜想，也是克雷数学研究所悬赏百万美元的千禧年问题之一，自它提出之时起就在数学研究中占有突出位置，很多问题与它有关，还与算子代数、非交换几何、统计物理等有深刻的联系，在阿达玛和德拉瓦勒-普森对素数定理的证明中起关键作用。

黎曼的工作对L函数和代数几何也有巨大的影响。L函数已是数论的一个中心研究对象，与分析、几何及表示论的联系极深，其在一些特殊点的值含有很多深刻的算术信息。我们先从狄利赫列的L函数说起。

2.2 L函数和朗兰之纲领

对有限循环群的特征,狄利赫列构造了与黎曼ζ函数类似的函数,现称为狄利赫列L函数。利用这些函数,他证明了一个有趣的结论——很多算术数列含有无限多个素数。具体说来就是:如果两个正整数a和m互素,那么算术数列a + m, a + 2m,a + 3m...,a + km,... 里有无穷多个素数。

后来阿丁对数域的有限扩张域的伽罗华群的表示,类似地也定义了一类L级数并解析延拓得到一个L函数,现称为阿丁L函数。利用这些L函数,他证明了交换类域论里面很有名的阿丁互反律。上个世纪六七十年代朗兰之想把阿丁的工作延伸到非交换的类域论去。雅各和朗兰之对p进域上的简约代数群的不可约表示和整体域上的简约代数群的自守表示也定义了L函数。朗兰之给出了一系列猜想,这就是现在非常热闹的朗兰之纲领。

这个纲领的中心是函子性(functoriality)猜想,该猜想描述了不同代数群的自守表示之间深刻的联系。函子性猜想蕴涵了很多著名的猜想,如阿丁猜想、拉玛努金猜想、佐藤-塔特猜想等。函子性猜想的一个重要特殊情况是朗兰之互反律,或说朗兰之对应。通过整体域上简约代数群的自守表示定义的L函数称为自守L函数。还有一种L函数称为模体(motivic)L函数,是哈塞-韦伊L函数的推广,包括阿丁L函数和哈塞-韦伊L函数。本质上朗兰之纲领的中心问题就是证明所有的模体L函数均是自守L函数。

在最简单的情形下,函子性猜想就是阿丁互反律,类域论的实质。函子性猜想仅在一些很特别的情形得到证明,离完全解决遥远得很。但对函数域上的一般线性群,拉佛格在2002年证明了朗兰之的互反律猜想(即建立了朗兰之对应),并因此获得当年的菲尔兹奖。2010年发表的基本引理的证明也是这个纲领中的一个巨大进展。有意思的是来自代数群表示论的仿射斯普林格纤维和因研究可积系统而产生的希钦纤维化之间的联系在吴宝珠的证明中起一个关键的作用。吴宝珠因其对基本引理的证明获得2010年的菲尔兹奖。

研究函子性猜想的重要工具是赛尔伯格-亚瑟迹公式。赛尔伯格迹公式于1956年得出,与黎曼ζ函数的联系导致他引进了赛尔伯格ζ函数。赛尔伯格迹公式后由亚瑟在1974—2003年间做出各种推广,它在数学物理中也有很好的应用。

2.3 一元高次方程和群论

人们很早就会解一元一次和一元二次方程,一元三次和四次方程的公式解在16世纪被找到。在尝试得到更高次方程的根式解时,数学家的探索失败了,其中包括18世纪一流数学家拉格朗日。答案原来是否定:1824年挪威数学家阿贝尔证明了五次及更高次的方程一般没有根式解。稍后法国数学家伽罗华给出的证明影响深远,一个重要的数学分支——群论因此而诞生。我们可以简单说一下伽罗华的证明。5个人排队的排法有120种,一种排法按另一种方法重排就会产生第三种排法,于是这120种排法成为一个群,而且是不可解的,所以五次及更高次的方程一般没有根式解。

群论的影响几乎遍及整个数学,在物理、化学及材料科学中有很多应用,是研究对称的基本工具。1872年克莱因提出著名的埃尔朗根纲领,用群来分类和刻画几何,对几何发展影响巨大。拓扑学中同调群和同伦群是极重要的研究工具和研究对象。代数几何中阿贝尔簇是一类特别重要的几何对象。很多空间具有一些自然的群作用,从而可以作相应的商空间。这些商空间在几何、数论和表示论中极其重要。齐性空间和志村簇是其中两类例子,几何不变量则是一个有关的重要数学分支。

群论自身的研究同样是非常深刻的。上世纪一项伟大的数学成就是对有限单群的分类。这是一项庞大的工作,第一个证明主要的工作发表于1960—1983年期间,前后有100多位数学家参与,发表了数百篇论文,总长度超过10 000页。到2004年,群论专家完成第二个证明,总长度也达到5 000页。现在,他们正试图进一步简化。汤普森因其在单群分类中的杰出工作于1974年获菲尔兹

奖，他最出名的工作是与费特合作证明了伯恩赛德猜想：非交换的有限单群的阶是偶数，论文发表于1963年，占了《太平洋数学杂志》整个一期。阿西巴赫因其在有限单群分类的杰出工作获2012年沃尔夫奖。在有限单群中有一个非常大的单群，称为魔群，其中元素的个数大约是8×10^{53}，与数学中的月光猜想密切相关。1992年波谢兹证明了这个猜想，为此他引进了广义卡茨-穆迪代数，与他人一起引进了顶点算子代数。现在，这些代数都是重要的研究对象。主要因为这项工作，波谢兹于1998年获菲尔兹奖。

如果把所有整系数的一元多项式方程的根放在一起，我们得到一个数的集合，比有理数全体大，称为有理数域的代数闭包。有理数域的代数闭包的绝对伽罗华群及其表示的研究是现代数学尤其是数论中极其重要的研究课题。

如果一个数不是任何整系数一元多项式的根，则称这个数是超越数，π就是一个超越数。超越数的研究也是数论的重要组成部分，贝克尔曾因对超越数的研究获得1970年的菲尔兹奖。一些自然产生的数如某些无穷级数的和与某些函数的值等是否为超越数是人们特别感兴趣的。

在群论中，李群和代数群的理论与其他数学分支的联系十分广泛和深刻。群表示论，尤其是李群和代数群的表示论是现在非常活跃的分支。李群和代数群的离散子群特别有意思，与数论和遍历论等分支的联系极为密切，马古利斯因其在半单李群的离散子群上的深刻工作获1978年的菲尔兹奖。

2.4 不定方程和数论

不定方程是数论研究的中心对象之一。直角三角形三边的关系$X^2+Y^2=Z^2$就是一个不定方程，它与圆方程类似。它有很多的整数解，勾三股四弦五就给出一组。一般的解很容易给出：$X=a^2-b^2$, $Y=2ab$, $Z=a^2+b^2$，其中a,b是任意整数。高次的情形就是方程$X^n+Y^n=Z^n$，其中n是大于2的整数。1637年，费马在一本书内的边页写道他有一个此方程无非平凡整数解的证明，但太长，边页空白处写不下。人们怎么也没找出费马说的那个证明，一般认为费马在书中注记说的证明可能有问题，于是此方程无非平凡整数解成为一个猜想，称为费马大定理问题。这个猜想一直吸引着数学家的强烈兴趣，费马本人对4次的情形的证明流传下来，3次的情形是欧拉在1770年证明的，5次的情形于1825年由勒让德和狄利赫列独立证明，等等。19世纪库莫对这个问题的研究导致了代数数论的诞生。1920年，莫德尔提出一个猜想：有理数域上亏格大于1的代数曲线的有理点只有有限多个。这个猜想被法尔廷斯于1983年证明，它蕴含了费马的方程在n比2大时至多存在有限多个本原整数解。法尔廷斯主要因此获得1986年的菲尔兹奖。费马大定理最后在1995年被外尔斯证明，这是上个世纪一项伟大的数学成就。代数数论现在是非常有活力的数学分支。

在外尔斯对费马大定理的证明中，椭圆曲线起了关键的作用。椭圆曲线的方程其实很简单：$Y^2=X^3+aX+b$，其中a,b是常数，如1，2等等。它们有群结构，在射影空间中的几何图形就是环面，与汽车轮胎一个形状。对椭圆曲线也能定义L函数。BSD猜想断言这个L函数在一处的值与椭圆曲线的群结构密切相关。这个猜想是克雷数学研究所悬赏百万美元的千禧年问题之一，自然是数学的研究热点之一。

BSD猜想还和一个古老的问题有关。如果考虑方程$X^2+Y^2=Z^2$的正数解，那么解是一个直角三角形的3个边长。有一个古老的问题：什么时候这个三角形的面积XY/2是

整数，而且X,Y,Z都是有理数。这样的整数称为和谐数（congruent number）。数组（3,4,5）和（3/2, 20/3, 41/6）是方程的解，所以6和5都是和谐数。塔奈尔1983年的一个结果告诉我们，如果BSD猜想成立，有可行的计算办法判定一个整数是否为和谐数。

2.5 多项式方程和代数几何

我们已经看到解方程，哪怕是一个一元的或简单的二元方程，都不是容易的事情，其研究给数学已经而且还要带来巨大的发展。多项式方程组的求解显然更为困难，甚至一般说来是毫无希望的。我们需要换一个角度，把一组多项式方程的零点集看作一个整体，就会得到一个几何空间，称为簇。研究簇的数学分支就是代数几何，一个庞大深刻又极富活力的分支。我们读中学时就知道，一个二元一次方程和直线是一回事，$X^2+Y^2=1$ 则是单位元圆周的方程。代数几何的踪迹可以追溯到公元前，17世纪笛卡尔建立的解析几何可以看作是代数几何的先声。

代数几何的中心问题是对代数簇分类。但这个问题太大太难，现阶段尚无希望完全解决，人们只能从不同的角度考虑更弱的问题。一维的情形是代数曲线，其分类很容易，在19世纪就知道光滑的射影曲线可以用它们的亏格来分类，这时还有著名的黎曼-洛赫定理。大约在1885—1935年期间，代数几何史上著名的意大利学派对二维的情形研究了分类，也得到了二维情形的黎曼-洛赫定理。意大利学派的特点是几何直观思想丰富深刻，后期的工作严格性不足。后来，上个世纪四五十年代韦伊和查里斯基用新的语言严格表述代数几何的基础。小平邦彦和沙法列维奇及其学生在上个世纪60年代重新整理了代数曲面的分类。小平在代数几何和复流形上的工作十分有影响，早在1954年，他就获得菲尔兹奖，沙法列维奇在代数数论和代数几何上都做出重要的贡献，有著名的沙法列维奇猜想，至今未解决。

曼福德和庞比利在上个世纪六七十年代把意大利学派对曲面的分类工作做到了特征p域上。曼福德在代数几何方面的贡献是多方面的，构造了给定亏格的曲线的模空间、几何不变量的研究等，因为这些贡献，他于1974年获菲尔兹奖。庞比利则因其在解析数论、代数几何和分析数学上的杰出工作于1974年获菲尔兹奖。

三维情形的分类直到上个世纪80年代才由日本数学家森重文完成，他因此于1990年获菲尔兹奖。如何把这些分类的工作推广到高维的情形是非常活跃的研究方向。

前面提到的黎曼-洛赫定理是极其重要的定理，它计算了某些函数空间的维数。1954年希茨布茹赫把它推广到高维，现称为希茨布茹赫-黎曼-洛赫定理。这是他最为人知的工作，其实他对拓扑、复分析和代数几何都做出过重要的贡献，1988年获沃尔夫奖。希茨布茹赫-黎曼-洛赫定理很快被格罗登迪克进一步推广成格罗登迪克-希茨布茹赫-黎曼-洛赫定理。为此，格罗登迪克定义了K群，这是K理论的开始。后来阿梯亚和希茨布茹赫发展了拓扑K理论，它被阿梯亚和辛格用于证明阿梯亚-辛格指标定理。希茨布茹赫-黎曼-洛赫定理也是1963年出现的阿梯亚-辛格指标定理的先声。阿梯亚于1966年获菲尔兹奖，这个指标定理是他最为有名的结果。K理论已成为代数、数论、几何、拓扑等分支的重要工具，奎棱因为在上个世纪70年代建立了高阶K理论而于1978年获菲尔兹奖，沃尔沃兹基因其对米尔诺关于K群的一个猜想的证明和相关的工作获得2002年菲尔兹奖。

对有限域上的代数簇，韦伊1949年提出了一个猜想，其中一部分可以看做黎曼猜想在有限域上的形式，对以后代数几何的发展影响巨大，包括塞尔和格罗登迪克在代数几何上的工作。上世纪五六十年代格罗登迪克用概型的语言改写了代数几何，在此基础上极大地发展了代数几何，包括为证明韦伊猜想而建立的l进制上同调理论。他于1966年获菲尔兹奖。其思想和工作对代数几何与数学的发展影响深远。1974年格罗登迪克的学生

德林用l进制上同调证明了韦伊猜想中的黎曼假设部分并主要因此于1978年获菲尔兹奖。

如果一个代数簇有奇点，那么很多对研究无奇点代数簇有效的工具就失效了。1964年广中平祐找到一个办法解消奇点，为此于1970年获得菲尔兹奖。几何中的奇点很有意思，常常蕴含丰富的信息，与其他的分支有出人意料的联系，如舒伯特簇的奇点和李代数的表示的联系就是一个例子。

2.6 群和李代数的表示理论

前面我们看到因为一元高次方程的研究产生了群论，它的应用很广泛。很多时候，群是通过它的表示从而应用到其他分支和领域。表示在数学中间是随处可见的，比如说我们熟悉的多项式环，分析里面的平方可积函数空间，拓扑里面的上同调群和K-群等等，就有丰富的表示结构。在物理和化学中也很常见，例如在单粒子模型中，单电子的轨道波函数生成三阶正交群的表示，自旋波函数生成二阶酉群的表示。上个世纪60年代吉尔-曼用三阶酉群的十维表示预言了Ω粒子的存在，后来很快被实验证实。

群表示理论是一个庞大而且非常活跃的研究领域，在数学和物理中应用广泛。李群和代数群在单位元处的切空间是李代数，可以看做李群和代数群的线性化。李代数和相关的代数如顶点算子代数等及其表示同样在数学和物理中应用广泛。有限群的表示可以通过其群代数的模来研究。过去几十年，代数的表示论有很大的发展，尤其是林格尔发现代数表示论与量子群的联系之后。I.M. 格尔方德似乎对这个领域有独特的感受，曾经说"所有的数学就是某类表示论"(All of mathematics is some kind of representation theory)。他是伟大的数学家，从研究的广度和深度来说，上个世纪后半叶能和他相提并论的数学家是非常少的，他对表示论做出的贡献广泛深刻。

表示论的基本的思想有两点：一是对称，二是线性化。这个领域关心的主要问题有：最基本的表示的性质，如分类、维数、特征标等；一般的表示如何从最基本的表示构建；如何构造最基本的表示；一些自然得到的表示的性质；等等。大致说来表示论就是要弄清楚这些事情。

表示论一直吸引着最优秀的数学家，早期如索菲斯·李、E. 嘉当(陈省身先生的老师)，外尔，后来有I.M. 格尔方德、哈里西-钱德拉、赛尔伯格等，现在有朗兰之、卡兹但、俊菲尔德、拉佛格、路兹梯格、吴宝珠，等等。奥昆寇夫的工作揭示了概率论、表示论和代数几何之间的一些深刻联系，并因此获2006年菲尔兹奖。

表示论过去几十年的发展可能给人印象最深的是几何方法在代数群和量子群表示理论中的运用并由此产生的几何表示论、用表示论研究数论的朗兰之纲领和一个平行的几何朗兰之纲领、李(超)代数及其表示的发展与在理论物理和数学物理中的应用(包括标准模型)，还有近20年的一股范畴化潮流。另外，传统的李群表示理论、代数表示论和有限群的模表示理论也是很活跃的。这些依然是表示论的主要研究方向。几何中的相交上同调、反常层理论和K理论在表示论中的运用给表示论带来巨大的进展，很多困难的问题得到解决，也带来了很多新的研究课题。这个方向的一个代表性人物是路兹梯格。正是用几何的方法，他建立了有限李型群的特征标理论，或许这是目前有限群表示理论中最为深入的部分。

2.7 计数、集合论和数理逻辑

计算物品的数量是我们日常生活经常要做的事情。对有限集合，确定其中元素的

个数理论上不是问题，一个一个地数就行了。组合论的一部分就是研究计数，和数论密切相关。但对无限集合，事情显然并不简单。例如某人有个面积无穷的王国，国土增加一两平方公里对他显然没意义。无限集合的计数理论是德国人康托在19世纪后半叶建立的，称为集合论。其中一个核心的概念是等势：如果两个集合之间能一一对应，则称为等势。有意思的是，自然数集合和有理数集合等势，但与实数集合不等势。1874年，康托提出有名的连续统假设：实数集合的任何无穷子集要么与实数集合等势，要么与自然数集合等势。1940年哥德尔证明了这个假设与现有的公理体系不矛盾。上世纪60年代，科恩建立了强有力的力迫法，证明了连续统假设之否与现有的公理体系不矛盾，他因此获得了1966年的菲尔兹奖。

现代数学是建立在集合论上的，集合论也是数理逻辑的重要组成部分。连续统假设表明，我们的逻辑体系并不能对每个陈述断定真伪。事实上更早以前就有各种各样的悖论和哥德尔的不完全定理表明数学逻辑体系的危机。数学家为补救这些缺陷做了巨大的努力，这包括罗素和怀特海德的3大卷《数学原理》等。罗素获得1950年的诺贝尔文学奖。与数理逻辑密切相关的一个问题是P和NP问题，这是克雷数学研究所的千禧年问题之一，也是理论计算机科学领域最有名的问题。简单说，P和NP本质上问的是如下事情：给了一些整数，能否有很快捷的方法（即多项式时间算法）判断这些整数的某一部分的和为零。

模型论是数理逻辑的一个分支，在代数和代数几何有深刻的应用，有些代数几何结果是最先用模型论发现并证明的。1996年赫鲁晓夫斯基用模型论证明了函数域上的莫德尔-朗猜想，名噪一时。

3 形与几何、拓扑

最简单的形无疑是线段、直线、多边形、多面体、圆、球、椭圆、抛物线、双曲线等，它们也是几何与拓扑的起点，人类很早就研究它们了。我们做一个简单的游戏：多边形的顶点的个数等于边的个数，多面体的面的个数加上顶点的个数等于棱的个数加2。后一个等式称为欧拉公式，虽然并不是欧拉最早发现的。这些公式被认为是拓扑学的起源。拓扑学研究几何空间的整体性质，就是说那些在连续变形下不变的性质，是数学的主流分支，在数学的其他分支和物理中的应用极其广泛，有时是研究一些问题必不可少的工具，如广义相对论中的一般性的时空奇点定理就是彭罗斯把拓扑学引入广义相对论而证明的。

如果把多面体的棱角磨平，再整理一下，我们就得到球了。欧拉公式本质上是说球面的欧拉示性数等于2。一个几何空间的欧拉示性数是通过空间的同调群定义的。球面当然是一个光滑的曲面。对于一般的光滑曲面，有高斯-伯内特公式，它把欧拉示性数和曲面的曲率联系起来，从而把微分几何与拓扑联系起来，非常深刻，对以后数学的发展影响很大。上世纪40年代，阿冷多尔费尔和韦伊把它推广到高维的情形。陈省身对高维情形的高斯-伯内特公式的证明则是整体微分几何的一个开端，影响深远。

上面提到同调群，它们是研究拓扑的主要手段之一，也是代数拓扑研究的主要对象之一。基于不同的目的，人们定义了各种各样的同调群和上同调群。在好的空间如流形上，这些（上）同调群都是一样，而且有著名的庞加莱对偶。但对有奇点的空间，如何定义好的（上）同调群，花了人们很长的时间。直到上个世纪80年代，高热斯基和曼可菲森才找到对空间奇点研究很有意义的一种上同调，称为相交上同调。后来伯恩斯坦、贝林森和德林3人用层的语言处理相交上同调，形成了反常层理论。很快相交上同调和反常层理论成为研究代数几何、拓扑和表示论的强有力工具。夫洛尔同调在低维拓扑和辛几何中是有力的研究工具，它是夫洛尔为研究辛几何中的阿诺德猜想而引进的。

同调群中有一些特别的元素对研究认识空间的几何结构非常重要，这些元素就是示性类。最著名的示性类有陈类、史提芬-惠特尼类、庞特列亚金类等。对光滑的复代数簇的德拉姆上同调，其中一

些元素称为霍奇类。代数几何中一个未解决的主要问题是霍奇猜想，它断言霍奇类都是一些代数圈类的有理线性组合，这也是克雷数学研究所的千禧年问题之一。

圆和球是我们熟悉的基本形状，在数学上的意义非凡。圆周在三维空间的嵌入称为纽结。通俗说来纽结就是一根首尾相连的柔软绳子，在不弄断绳子，也不打结的情况下，它在三维空间中的各种样子。纽结理论是拓扑学中非常活跃的分支，一个重要的问题是寻找纽结不变量。20年代发现的亚历山大多项式是纽结不变量，纽结补的基本群是纽结不变量，称为纽结群。70年代，瑟斯顿把双曲几何引入纽结的研究中，从而定义了新的有力的不变量。80年代琼斯发现了新的多项式不变量——琼斯多项式。威腾和孔策维奇等人一系列的后续工作则揭示了纽结和统计力学、量子场论之间的深刻联系。琼斯多项式是琼斯1990年获菲尔兹奖的重要工作之一。图拉耶夫等人用量子群研究纽结，得到新的不变量，很有影响。以上是圆周给我们带来的深刻数学的一部分。下面我们看一下高维的情形——球面。

关于球面，最有名的应该是庞加莱1904年提出的猜想，它断言一个单连通的闭三维流形与球面同胚。在2003年被解决前，这个猜想是拓扑学中的一个中心问题。在此之前，数学家做过很多的努力。既然三维的情形证明不了，人们就对高维的情形考虑类似的问题。1961年，斯梅尔证明了当维数大于4时，高维的庞加莱猜想成立，他因此获得1966年的菲尔兹奖。1982年弗里德曼对四维的情形证明了庞加莱猜想，于是他获得1986年的菲尔兹奖。庞加莱猜想最后在2003年被佩雷曼证明，这是轰动一时的结果，标志着数学中一个大问题的终结，也是克雷数学研究所7个千禧年问题中到目前为止唯一被证明的。佩雷曼证明这个猜想所用的工具是非常有意思的，那就是几何分析。几何分析是微分几何与微分方程的交叉学科，丘成桐、哈密顿等人在其中的建立和发展起了突出的作用，是一个有力的工具，也是非常活跃的研究方向。2007年布仁德尔和舍恩用几何分析的方法证明了微分球定理，是流形理论中一个重要结论。

球面带来的深刻数学还很多。1956年，米尔诺发现七维球面上有非标准的微分结构。这一发现对拓扑学的发展影响很大，是米尔诺最有名的工作，也是他1962年获菲尔兹奖的主要工作之一。六维球面是否有复结构则是困扰数学家很多年的一个问题，至今未解决。球面的同伦群也是拓扑学研究的重要问题，至今未完全解决。上世纪50年代初，塞尔成功计算了球面的很多同伦群，这是他获1954年菲尔兹奖的重要工作之一。同伦群现在仍是拓扑学研究的一个主要方向。

在几何与拓扑中，一个基本问题是对流形分类。流形有各种各样的，如拓扑流形、微分流形、复流形、黎曼流形、辛流形、无穷维流形，等等，这里面的问题和结果都是非常丰富的。闭二维拓扑流形是曲面，其分类很早就知道，结果很漂亮：同构类由曲面的亏格完全确定。曲面的亏格就是曲面所围的空洞的个数，如汽车轮胎是亏格为一的曲面，它只围了一个空洞。三维流形的研究中，瑟斯顿的工作非常重要，他发现双曲几何在三维流形的研究中起突出的作用。瑟斯顿提出的几何化猜想是比庞加莱三维球面猜想更广泛的猜想，后与庞加莱猜想一起得到证明。瑟斯顿因其在三维流形上的开创性工作获得1982年的菲尔兹奖。

4 切线、面积、速度、加速度等和微积分、分析数学

我们会求一些简单图形如多边形、圆等

的面积，也会求圆的切线，但对更复杂的图形，这就不是一件容易的事情了。在物理中，对于非匀速运动，求加速度和路程同样不是一件容易的事情。对这些问题的探索最后导致牛顿和莱布尼兹在17世纪分别独立建立了微积分。用微积分我们能轻易求出一些复杂图形的面积、体积，确定物体的加速度、路程，π的精确值等等。微积分及在其上发展起来的分析数学成为认识和探索世界奥秘最有力的数学工具之一，为数学带来全面的大发展，促进了很多新分支的产生如解析数论、实分析、复分析、调和分析、微分几何、微分方程等等。

微积分的基本概念有极限、微分和积分，分析数学的基本研究对象是函数。1927年物理学家狄拉克在研究量子力学时引进了δ函数，它不是经典意义下的函数，给当时的数学家带来很大的困惑。许瓦茨建立的分布理论使得δ函数变得容易理解并能严格处理，他因此获1950年的菲尔兹奖。分布理论在现代偏微分方程理论中极其重要。

正弦函数和余弦函数都是周期函数。傅立叶认为它们是描述周期运动的基本函数并在19世纪初建立了相应的理论，现称为傅立叶分析。傅立叶分析及其更一般的理论调和分析是内容非常丰富且应用很广泛的数学分支。如果注意到正弦和余弦函数可以看作圆周上的函数并把单位圆周与模长为一的复数等同起来，就知道傅立叶分析与李群表示论是密切相关的。卡尔松因其在调和分析上的重要工作于1992年获沃尔夫奖，特别是他理清了函数与其傅立叶级数表示的关系。陶哲轩在调和分析上的工作也是他获菲尔兹奖的工作的一部分。李群和拓扑群上的调和分析是一个重要的分支，与泛函分析密切相关，在数论中的深刻应用使人惊叹。

大自然很多的奥秘是通过微分方程表述的，描写电磁运动的麦克斯韦方程，描写微观世界的薛定谔方程，描写流体运动的纳维尔-斯托克斯方程，描写宏观世界的爱因斯坦方程等等。这些方程都是非线性微分方程，有很多人研究，纳维尔-斯托克斯方程是否有整体光滑解则是克雷数学研究所的千禧年问题之一。

在线性偏微分方程上，赫曼德的工作可能是最深刻和突出的，他因此获得1962年的菲尔兹奖。P. L. 里翁斯在非线性方程上的杰出工作使他获得了1994年的菲尔兹奖。丘成桐发展一些强有力的偏微分方程技巧用以解决微分几何的一些重要问题如卡拉比猜想等，在这些工作的基础上，几何分析逐步发展起来。因为这些工作，丘获得1982年的菲尔兹奖，另外，他的工作在理论物理和数学物理中有极大的影响。偏微分方程领域引人入胜的深刻问题比比皆是，一流的数学家很多，如拉克斯、卡发热利等等。

只有一个独立变量的微分方程称为常微分方程，很多这类方程来自经典力学，如牛顿第二定律，独立变量很多时候就是时间。混饨理论来自常微分方程的研究。事情起源于19世纪末，自17世纪以来人们一直试图弄清太阳系行星运行轨道的稳定性。如果只有两个星球，那么牛顿的万有引力定律很容易导出星球的轨道行为，但太阳系是多体的，极其复杂。庞加莱想先把三体问题解决，但发现问题太困难，清楚写出微分方程的解是没希望的，只能考虑解的定性研究，结果发现解的混沌性。对一些微分方程的解混沌性，有一个通俗的说法——蝴蝶效应，意指在一定的约束下，刚开始时很小的差别可以导致后来巨大的差异。混沌理论的应用十分广泛，气象预报是其中之一。三体问题的一个幂级数解在1912年由逊德曼给出，但对初始值有很强的要求，而且收敛得很慢。逊德曼的结果被王秋东（音译）在1991年推广到多体的情形，但没考虑奇点问题。

常微分方程解的定性研究与动力系统密切相关。太阳系的运动是一个动力系统（运动和力之间关系的系统），由万有引力决定，所以是一个常微分方程的动力系统，庞加莱对太阳系和三体问题的研究是动力系统史上非常重要的工作。动力系统是很活跃的研究领域，其中一个研究方向是复动力系

统，研究函数的迭代。约科兹因其在动力系统的杰出工作获1994年菲尔兹奖。曼克木棱在复动力系统方面的重要工作是他获1998年菲尔兹奖的原因之一。部分因其在动力系统方面的重要工作，斯米尔诺夫获得2010年菲尔兹奖。研究有不变测度的动力系统的分支称为遍历论，与调和分析、李群及其表示、代数群、数论有密切的联系。林德施特劳斯因其在遍历论中的出色工作获得2010年的菲尔兹奖，另外马古利斯获1978年菲尔兹奖的工作中遍历论起了重要的作用。

在19世纪对常微分方程的研究导致了李群和李代数的诞生，后者在数学和物理中的应用广泛深刻。

无限维空间上的分析是泛函分析，巴拿赫空间和希尔伯特空间及其上面的算子是基本的研究对象，其中的希尔伯特空间对量子力学有着基本的重要性。泛函分析重要的一支是算子代数，与表示论、微分几何等有深入的联系。孔内斯因对一些算子代数的分类获得1982年的菲尔兹奖。他还把泛函分析引入非交换微分几何的研究中。高韦尔斯主要因其在巴拿赫空间上的重要工作获1998年的菲尔兹奖。

5 数学物理

物理一直是给数学发展带来最为强大推动力量的学科，在这里有着无穷无尽的问题，提供非常鲜活、生动的思想，它永远给数学带来很多特别深刻的东西。弦理论、量子场论和规范场论是非常活跃的领域。弦理论能统一4种基本的作用力，把量子力学和相对论统一起来。卡拉比-丘流形在超弦理论中非常重要，因为额外的时空被认为是六维卡拉比-丘流形。杨-米尔斯理论是一种规范场论，共形场论则是一种量子场论。

上个世纪80年代初期，唐纳森利用杨-米尔斯理论中的方程的一类特别的解，称为瞬子，研究四维流形的微分结构，证明了一大类四维流形没有光滑结构，而有些则有无穷多的微分结构。唐纳森因其在四维流形上的开创性工作获得1986年的菲尔兹奖。结合他的结果和弗里德曼关于四维流形分类的结果，1987年陶贝斯证明了四维欧氏空间有不可数多的微分结构。注意我们生存的三维空间加上一维的时间就是四维欧式空间，而其他维数的欧式空间则仅有一种微分结构。瞬子在数学和物理中都有很多的用处，杨-米尔斯理论在数学上则可能是最受重视的规范场理论，是否对任意的紧单的规范群在四维欧式空间存在质量间隙非负的量子杨-米尔斯理论是克雷数学研究所的千禧年问题之一。

在共形场论的研究中，群论、李代数、顶点算子代数、维那索拉代数等代数结构是描述对称的工具，十分重要。

也是在上个世纪80年代初，数学物理中对量子可积系统和杨-巴克斯特方程的研究导致了俊菲尔德和神保（相互独立）在上世纪80年代中期定义了量子群，随后引发了世界范围的研究热潮，产生了很多深刻的结果如典范基和晶体基，新的纽结不变量等，引出很多新的研究问题。俊菲尔德因其在量子群和表示论上的工作获1990年菲尔兹奖。

在过去几十年的数学物理进展中必须提到威腾的工作，他带来很多新的深刻思想，在数学和物理中架起桥梁，为相关研究方向带来全新的面貌和很多问题，给数学和物理两者都带来巨大的影响，因为其深刻的工作他于1990年获得菲尔兹奖。在对两个假设的量子场论作比较时，威腾对代数曲线的模空间提出一个猜想，后被孔策维奇证明。同样基于量子场论的考虑，威腾认为存在一些可通过某些积分计算的纽结和三维

流形不变量,此事后被孔策维奇证实。这些工作影响很大,是孔策维奇获得1998年菲尔兹奖的部分主要工作。

近年来,统计力学及相关的研究方向包括随机过程等非常活跃,有很多突出的进展,2010年维那尼因其关于波尔兹曼方程和兰道阻尼的工作获得费尔兹奖,斯米尔诺夫获费尔兹奖的部分工作也与统计力学有关。

6 结束语

以上对基础数学进展的介绍是很不全面的。不过,从以上的介绍可以看出,数学的发展始终贯穿在对基本问题和基本对象的探索认识中。好的问题对数学的发展起了巨大的推动作用。在数学研究中,我们需要考虑好的问题,基本的问题,同时要有好的数学思想。写完这篇文章后,一个强烈的感受是在数学的发展中,我国做出的贡献太少。缺乏好的传统和数学思想乃至背后的哲学思想和思考可能是一个重要的原因,在这些方面我们还有很大的差距。可能我国已有很多数学家感受到我们还未形成中文数学的思考体系和语言体系,对数学的认识仍然很不足,在努力成为数学强国的路途上我们有很多的东西需要弥补,需要时间,需要国家的支持,更需要数学家的努力。

主要参考文献

1 M.克莱因. 古今数学思想(1-4卷). 北京大学数学系翻译.上海:上海科学技术出版社,2009.

2 亚历山大洛夫 A D等. 数学:它的内容方法(1-3卷). 孙小礼, 赵孟养, 裘光明等译. 北京:科学出版社,2010.

3 Weil A. History of mathematics: why and how, proceedings of the international congress of mathematicians. Helsinki, 1978,1: 227-236.

4 国外数学名著系列(影印版). 北京:科学出版社,2006年及以后.

5 国际数学家大会论文集. http://mathunion.org/ICNY

6 克雷数学研究所的7个千禧问题. http://mathunion.org/ICM/

7 维基百科. http://www.claymath.org/millennium/

8 Reid C. Hilbert. New York : Springer-Verlag, LLC, 1996.

9 王元. 华罗庚. 南昌:江西教育出版社,1999.

10 张奠宙, 王善平. 陈省身传(修订版).天津:南开大学出版社, 2011.

11 Poincaré H. Mathematics and Science Last Essays. BiblioBazaar, 2009.

12 Hardy G H. A Mathematician's Apology. Cambridge:Cambridge University Press, 1940(第一版), 1992年(Canto版). 中译本:一个数学家的辩白.

Some Developments in Pure Mathematics

Xi Nanhua

(Academy of Mathematics and Systems Science, CAS 100190 Beijing)

Abstract We try to display some features of pure mathematics through the historic course of understanding some fundamental objects of mathematics such as numbers, equations, lines, circles, spheres, functions, etc.. By doing these, we hope that some interesting thoughts of mathematics and part of the status quo of pure mathematics are shown up.

Keywords pure mathematics, number, shape, algebra, geometry, analysis

席南华 中科院院士,中科院数学与系统科学院研究员。研究代数群与量子群,对仿射A型Weyl群证明了Lusztig关于双边胞腔的基环的猜想,确定了Deligne-langlands关于仿射Hecke代数的猜想成立的充要条件,与Lusztig合作发现典范左胞腔,在量子群的表示和基的研究上开展了系统深入的工作。E-mail:nanhua@math.ac.cn