

# 不确定性量化的高精度数值方法研究进展

周涛

不确定性量化 (Uncertainty Quantification, UQ) 是近年来国际上热门的研究课题, 其应用领域包括水文学、流体力学、数据同化和天气预测等。由于 UQ 问题中的大量随机参数引起的超大计算量, 如何设计高效的高精度数值方法变得非常重要, 与其相关的计算技术和数学理论也引起人们的高度重视。高精度随机配置方法的核心问题之一是如何设计在高维空间中的抽样方法, 使得在尽可能少的样本信息下保证算法的稳定性和最佳收敛性。现有的高精度随机配置方法主要集中于随机抽样方法, 即根据随机输入的类型进行随机空间的样本抽取, 在这种框架下, 可以在一定条件下证明算法的依概率稳定性和最佳收敛性。然而, 这个框架主要存在两个研究瓶颈: (1) 由于随机样本的固有属性, 只能在概率意义下讨论算法的收敛性, 或者换句话说, “失败概率” 难以避免。(2) 传统的随机抽样方法对样本的使用数量要求很高, 通常需要样本数量 “平方” 的依赖于逼近空间自由度, 这对于实际应用提出挑战。因为对于  $\tilde{y}$  个样本, 我们需要求解一个可能很复杂的偏微分方程。并且, 对于无穷区域的随机输入问题, 传统的随机抽样方法被证明是不稳定的。

针对以上两个研究瓶颈, 数学与材料环境交叉研究部周涛博士进行了系统研究, 取得了以下突破:

一, 为了消除失败概率的影响, 周涛博士与许志强研究员合作, 通过使用数论领域的 Weil 指数和定理, 构造了高维空间的确定性配置点, 我们称之为 “Weil” 样本。此样本由具体公式给出, 并且易于计算。通过使用 “Weil” 样本, 可以彻底消除了传统随机抽样方法中的失败概率。换句话说, 通过使用 “Weil” 样本, 可以证明不依赖概率的稳定性和最佳收敛性。相关研究论文信息如下:

- \* Zhiqiang Xu and **Tao Zhou**, On sparse interpolation and the design of deterministic interpolation points, **SIAM J. Sci. Comput.**, **36-4 (2014)**, pp. **A1752-A1769**.
- \* **Tao Zhou**, Akil Narayan and Zhiqiang Xu, Multivariate discrete least-squares approximations with a new type of collocation grid, **SIAM J. Sci. Comput.**, **36-5 (2014)**, pp. **A2401 - A2422**.

二, 为了改进随机抽样中对于样本使用数量的严格要求, 周涛博士和合作者引入了 “位势理论 (potential theory)” 的工具。与传统的抽样方法不同, 我们建议采用 “平衡态测度 (equilibrium measure)” 进行抽样, 并且设计基于 Christoffel function 的权重, 进而求解加权的随机配置方法。这个框架非常一般, 既包括有界区域的随机输入问题, 也包括无穷区域的随机输入问题, 从而自然解决了无穷区域问题的研究瓶颈。更令人兴奋的是, 在这个框架下, 我们证明 “线性的依赖关系” 即可以保证算法在渐进意义下是最优的, 于是解决了随机抽样中高计算量的瓶颈。相关研究论文信息如下:

- \* Tao Tang and **Tao Zhou**, Discrete least square projection in unbounded domain with random evaluations and its application to parametric uncertainty quantification, **SIAM J. Sci. Comput.**, **36(5)**, A2272 - A2295, 2014.
- \* John Jakeman, Akil Narayan, and **Tao Zhou**, A Christoffel function weighted least squares algorithm for collocation approximations, arXiv:1412.4305, to appear in **Math. Comput.**, 2016.
- \* John Jakeman, Akil Narayan, and **Tao Zhou**, A generalized sampling and preconditioner scheme for sparse approximation of polynomial chaos expansions, arXiv:1602.06879, to appear in **SIAM J. Sci. Comput.**, 2016.