

切换线性系统的反馈镇定设计

反馈镇定问题是动态系统设计和综合中最重要的问题之一。对线性系统，反馈镇定问题可通过极点配置或 LQ 等方法解决。对切换线性系统，尽管已有的研究不可胜数，这个问题仍远没有完整解决。与线性系统相比，切换线性系统反馈镇定问题面临的困难和挑战包括：1) 可镇定性不意味着凸 control-Lyapunov 函数的存在性，从而使得有效 Lyapunov 函数的搜索和构造变得更困难；2) 即使完全能控的系统也可能不存在（一对一）分段线性的反馈控制器，这表明每个子系统可能需要多个线性状态反馈，而切换系统所需线性反馈的个数是否有上界？这是一个重要的问题；3) 切换系统的二次型最优通常没有稳态解，因此在此框架内寻求反馈镇定方案必然面临（候选控制器）指数爆炸问题。鉴于以上困难，信息技术部孙振东等科研人员针对能控离散时间可逆切换线性系统，发展最小切换次数的能控算法，给出切换镇定所需线性反馈个数的上界，获得解决切换镇定问题构造性的设计方案。

1. 实现能控性最小切换次数

切换线性系统的能控集是一个不变子空间，子空间中所有状态可经由一个切换路径和适定的控制在有限时间内被驱动到原点。实现上述能控性的切换路径中切换次数最小的路径称为最小切换次数路径，而此最小切换次数问题是 2005 年提出的公开问题。十几年来，已有的工作给出不少上界估计，比如，对 n 阶切换线性系统， $\sum_{k=1}^n n^k$ 和 2^n 都是已知的上界。然而，因为没有有效的下界估计，最小切换次数问题一直悬而未决。为此，他们通过研究系统能控集的结构，将能控集表达为若干个子空间的并，其中每一个子空间可经由某具有固定切换顺序的切换路径和适当控制输入驱动到原点。基于此观察，他们给出构造性的切换/控制方案，可把能控集中任一状态经由不超过 $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ 次切换实现能控性。进一步，他们构造了一个

例子，表明至少需要 $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ 次切换才能实现完全的能控性。由此，可知 n 阶切换线性系统实现能控性最小共同切换次数是 $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ 次，从而完整解决了最小切换次数问题。

2. 实现镇定的线性反馈个数上界估计

如前所叙，一个子系统对应一个线性状态反馈不足以实现切换线性系统的稳定性。一个基本的问题是，切换系统实现镇定设计需要多少线性状态反馈？为获得有效的上界估计，他们在实现能控性的最小切换次数问题的算法基础上，考虑单输入切换系统在有限时间内达到原点的 deadbeat 镇定设计问题，证明任一能控 n 阶单输入切换线性系统可通过不超过 n 个线性状态反馈和适当的切换策略实现切换系统的有限时间稳定。另一方面，对由 m 个子系统组成的能控多输入切换系统，可通过（非正则）状态反馈化为能控的单输入切换系统。由此，他们证明任一能控 n 阶切换线性系统可通过不超过 $n + m$ 个线性状态反馈和适当的切换策略实现切换系统的有限时间稳定。这不仅为实现镇定的线性反馈个数提供了有效的上界估计，同时还研究切换系统暂态性能（调节时间）提供了可行的方法基础。相关设计是构造性的，解决了能控离散时间可逆切换线性系统的反馈镇定问题。

最后，应当强调，上述成果是能控离散时间可逆切换线性系统取得的。对连续时间切换线性系统，尽管可以期待相关的结果仍成立，但苦于缺乏有效工具，还没建立起对应的设计框架。

这是他们进一步研究的方向。